# Prima Prova Parziale di Matematica - tema A

per il corso di laurea in Biotecnologie

31 ottobre 2008

**(1)** Sia $X$ un insieme non vuoto e siano $A$, $B$ sottoinsiemi di $X$. Si verifichi che

$$A \subseteq B \quad \text{se e solo se} \quad A \cap (X \setminus B) = \emptyset.$$

**(2)** Si considerino i numeri di Fibonacci

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \ldots,\ a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, risulta

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}.$$

**(3)** Sia $\mathbb{C}$ il corpo complesso e si consideri l'applicazione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2\,\overline{z}.$$

(a) Si determini l'insieme $I = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}$.

(b) Si determini l'insieme $f^*(\{1,\, i,\, 2-2i\})$.

(c) Si discuta se $f$ è biiettiva, determinandone in caso affermativo l'inversa.

**(4)** Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{1-\sin(\pi/2 - 1/x^2)}{\ln(x^2+1) - \ln(x^2)}.$$

**(5)** Si consideri l'applicazione reale di variabile reale

$$y = f(x) = \arctan(1/x^2) + \frac{3-x^2}{1+x}.$$

(a) Si determini il dominio di $f$ e si discuta l'eventuale sua prolungabilità per continuità.

(b) Si determinino, se esistono, i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(c) È vero che $f$ si annulla in almeno un punto $x_0 > 0$?